ASTRONEFS ET AERONEFS

Données :
Masse de la Terre $M_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg
Rayon de la Terre $R_T = 6{,}38 \times 10^{6}$ m
Masse du Soleil $M_S = 333 \times 10^{3} \times M_T$
Constante universelle de gravitation $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ S.I.
Valeur du champ de pesanteur au niveau du sol $g = 9{,}81$ m/s²
Masse volumique de l'air au niveau de la mer, à 15 °C $\rho_0 = 1{,}2$ kg.m^{-3}
Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314$ S.I.
Masse molaire de l'air $M = 29$ g.mol^{-1}
Densité de l'Hélium $d_{He} = 0{,}138$

Les vecteurs sont notés en gras

Les parties A, B et C sont indépendantes.

A. MOUVEMENTS ET TRAJECTOIRES

1. Lois de la mécanique

1.1. *Cinématique du point*

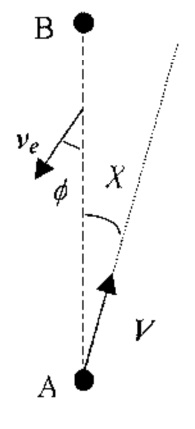
1.1.a. Donner la définition :

- d'un référentiel R ,
- de la vitesse $\boldsymbol{v}_R$ et de l'accélération $\boldsymbol{a}_R$ d'un point matériel M dans ce référentiel.

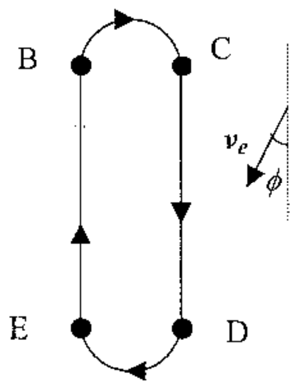
1.1.b. Donner les expressions de $\boldsymbol{v}_R$ et de $\boldsymbol{a}_R$ en coordonnées cartésiennes, cylindriques et dans la base de Frénet.

1.1.c. La vitesse et l'accélération de M sont notées respectivement $\boldsymbol{v}_{R'}$ et $\boldsymbol{a}_{R'}$ dans un référentiel R' en mouvement par rapport à R . Donner les expressions de $\boldsymbol{v}_R$ en fonction de $\boldsymbol{v}_{R'}$ et de $\boldsymbol{a}_R$ en fonction de $\boldsymbol{a}_{R'}$ dans le cas où R' est en translation par rapport à R puis dans le cas où il est en rotation à une vitesse angulaire ω autour d'un axe fixe dans R .

1.1.d. Un avion doit se déplacer en ligne droite d'un point A vers un point au sol B. Il subit un vent contraire de vitesse v_e. Le vecteur $\boldsymbol{v}_e$ fait un angle ϕ avec la trajectoire AB. L'avion vole à une vitesse constante V par rapport à l'air. Cette vitesse fait un angle X avec la route au sol AB.



1) A quelles conditions l'avion peut-il se déplacer en ligne droite de A vers B ? Calculer l'angle de correction X que le pilote doit afficher dans le cas où $V = 445$ km.h^{-1}, pour contrer un vent de vitesse $v_e = 56$ km.h^{-1} et $\phi = 20°$.
2) L'avion doit faire un aller-retour entre les deux points A et B distants de 500 km, dans les conditions de la question précédente. Calculer la durée t_{ar} du trajet aller-retour. On négligera le temps du demi-tour. Comparer cette durée avec le temps t'_{ar} qu'aurait mis l'avion pour faire le même trajet en l'absence de vent. Est-il possible que $t_{ar} < t'_{ar}$? Commenter cette maxime de l'aéronautique : *« le temps perdu ne se rattrape jamais »*.
3) En B, l'avion arrive au-dessus d'une balise au sol à une date prise pour origine des temps. Le contrôleur demande alors au pilote de réaliser à altitude constante un circuit d'attente BCDE constitué de deux parties semi-circulaires BC et DE et de deux parties rectilignes CD et EB. Il lui indique à quelle date t_B l'avion doit se présenter à nouveau au-dessus de la balise B.



Le pilote adapte l'inclinaison de l'appareil et donc le rayon des tronçons semi-circulaires BC et DE de manière à ce que ceux-ci durent 1 minute chacun. Durant cette attente, la vitesse V de l'avion est supposée constante et égale à 222 km.h^{-1}, tandis que la vitesse du vent est toujours $v_e = 56$ km.h^{-1}, et $\phi = 20°$.
A quelle date t_v le pilote doit-il entreprendre le virage DE si la date de passage au dessus du point B, imposée par le contrôleur, est $t_B = 4$ minutes ?

1.2. *Lancement d'un satellite*
On étudie le lancement d'un satellite artificiel à partir d'un point O de la surface terrestre.

1.2.a. Établir l'expression de la vitesse du point O dans le référentiel géocentrique R_g (assimilé ici à un référentiel galiléen) en fonction de la vitesse de rotation de la Terre autour de l'axe de ses pôles Ω, du rayon terrestre R_T et de la latitude du lieu λ.

1.2.b. En déduire les conditions les plus favorables pour le lancement du satellite. Parmi les trois champs de tirs suivants, lequel choisir de préférence ?
Baïkonour au Kazakhstan $\lambda = 46°$;
Cap Canaveral aux USA $\lambda = 28{,}5°$;
Kourou en Guyane française $\lambda = 5{,}23°$.

1.3. *Champ de gravitation*
On considère que la Terre de masse M_T et de rayon R_T a une répartition de masse sphérique et une densité volumique ρ.

1.3.a. Énoncer la loi de la gravitation universelle.
1.3.b. Montrer qu'en un point situé à une distance r du centre de la Terre, ($r > R_T$), le

Tournez la page S.V.P.

champ de gravitation peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{G} = -G\, M_T / r^2\, \mathbf{e}_r$$

Définir le vecteur $\mathbf{e}_r$.

1.4. *Lancement d'un satellite artificiel*

1.4.a. Établir l'expression de l'énergie potentielle de gravitation du système {Terre-satellite} en fonction de l'altitude z du satellite par rapport au sol. On prend pour référence une énergie potentielle nulle à l'infini. En déduire l'expression de l'énergie mécanique du satellite sur sa base de lancement dans le référentiel géocentrique.

1.4.b. On appelle ici vitesse de libération v_l, la vitesse verticale minimale qu'il faut communiquer initialement au satellite par rapport au sol, pour qu'il puisse se libérer de l'attraction terrestre. Donner l'expression de v_l. Calculer sa valeur numérique dans le cas où le satellite est lancé de la base de Kourou.

1.5. *Satellite artificiel en orbite*

On considère un satellite artificiel de masse m en mouvement circulaire autour de la Terre.

1.5.a. Montrer que le mouvement du satellite est uniforme. Établir l'expression de la vitesse du satellite en fonction de son altitude ainsi que la troisième loi de Kepler liant la période de rotation T du satellite au rayon r de sa trajectoire.

1.5.b. Calculer le rayon de l'orbite d'un satellite géostationnaire et définir son plan de révolution.

1.5.c. Quelle énergie cinétique minimale faut-il communiquer au satellite pour qu'il échappe à l'attraction terrestre s'il est initialement en orbite circulaire autour de la Terre à l'altitude z ? A.N. : $z = 36\,000$ km ; $m = 6$ t.

1.5.d. Soit un satellite d'énergie initiale E_{m0}. Son orbite est relativement basse et il subit donc les frottements des couches hautes de l'atmosphère. Il s'ensuit que l'énergie mécanique du satellite varie selon la loi :

$E_m = E_{m0}\,(1 + b\,t)$, b étant un coefficient constant positif.

On suppose que la trajectoire reste approximativement circulaire.

Préciser le signe de E_{m0}. Établir l'expression du rayon r et de la vitesse v du satellite en fonction du temps. Comparer les évolutions de r et de v ainsi que celles des énergies potentielle et cinétique. Que devient l'énergie perdue ?

1.6. *Sonde solaire*

On cherche à positionner une sonde spatiale de masse m en un point P de manière à ce que, abandonnée en ce point, la sonde reste immobile par rapport au système {Terre-Soleil}. Les positions correspondant à cette situation sont appelées « points de Lagrange ». Soient :

P_1 et P_2 les positions de Lagrange pour lesquelles le point P est aligné avec le centre T de la Terre et avec le centre S du Soleil, T et P se trouvant du même côté du Soleil ;

x la distance entre la sonde et la Terre ;

d la distance Terre-Soleil ;

$k = M_S / M_T$.

La masse de la sonde est négligée par rapport aux masses de la Terre et du Soleil. On tiendra compte de la rotation de la Terre autour du soleil.

1.6.a. Déterminer les valeurs des distances SP correspondant à ces positions. Faire un schéma. On considère que $x / d \ll 1$.

1.6.b. Quel est l'intérêt de placer un satellite en l'un de ces points ? Donner un exemple de ces satellites particuliers.

2. Mouvement de fusées

On étudie dans cette question le mouvement de fusées dans le référentiel terrestre. Elles sont soumises au champ de pesanteur $\boldsymbol{g}$ supposé uniforme.

2.1. *Mouvement d'une fusée balistique*
A la date $t = 0$, une fusée balistique, assimilée à un point matériel M de masse m constante, est lancée à partir d'un point O de la surface terrestre avec une vitesse initiale $\mathbf{v_0}$ inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale.

2.1.a. Établir l'équation de la trajectoire de la fusée dans le champ de pesanteur terrestre considéré comme uniforme. On néglige les frottements avec l'air. Quelle est la nature de la trajectoire obtenue ?

2.1.b. Calculer en fonction de v_0, g et α les coordonnées du point S d'altitude maximale atteinte ainsi que la portée de la fusée. Pour quel angle α cette portée est-elle maximale ?

2.1.c. La vitesse initiale v_0 de la fusée étant fixée, on peut faire varier l'angle α dans un plan vertical donné. Établir l'équation de la courbe dite « parabole de sûreté » qui sépare les points du plan vertical pouvant être atteints par la fusée de ceux qui ne peuvent pas l'être.
On donne : $1 / \cos^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$

2.2. *Fusée à un étage*
Une fusée, de masse totale initiale M, contient au départ un mélange combustible de masse $m_c = 0{,}8\ M$. Elle est lancée verticalement à la date $t = 0$. On note m la masse de la fusée à une date t. La propulsion est assurée par un dispositif à réaction. Les gaz émis sont éjectés de la tuyère avec un débit massique constant D_m à la vitesse relative u par rapport à la fusée. On néglige la résistance de l'air.

2.2.a. Donner l'expression de la quantité de mouvement des gaz éjectés par la fusée entre les instants t et $t + dt$. En déduire la variation de la quantité de mouvement de la fusée entre les instants t et $t + dt$.

2.2.b. Établir la relation :

$$m(t)\ \mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t = m(t)\ \mathbf{g} - D_m\mathbf{u}$$

En déduire l'expression de la force propulsive exercée par la réaction des gaz sur la fusée.
A quelle condition la fusée peut-elle décoller du sol verticalement ?

2.2.c. Exprimer l'accélération de la fusée en fonction du temps. A quelle date t_e le carburant est-il épuisé ? A.N. Données : $M = 12$ t ; $u = 2\ 400$ m.s^{-1} ; $D_m = 120$ kg/s.

2.2.d. Déterminer l'expression de la vitesse de la fusée en fonction du temps. Quelle est la vitesse maximale de la fusée ? A quelle date t_1 est-elle atteinte ? L'altitude z_1 atteinte à cette date est d'environ 83 km (ne pas justifier). Au vu de ce résultat, critiquer l'approximation $g \approx$ constante qui a été faite.

2.2.e. A quelle date t_2 la fusée atteint-elle son altitude maximale z_2 ? Déterminer z_2. A.N.

2.2.f. La fusée étudiée peut-elle communiquer à un satellite une vitesse qui lui permette de se libérer de l'attraction terrestre ?

Tournez la page S.V.P.

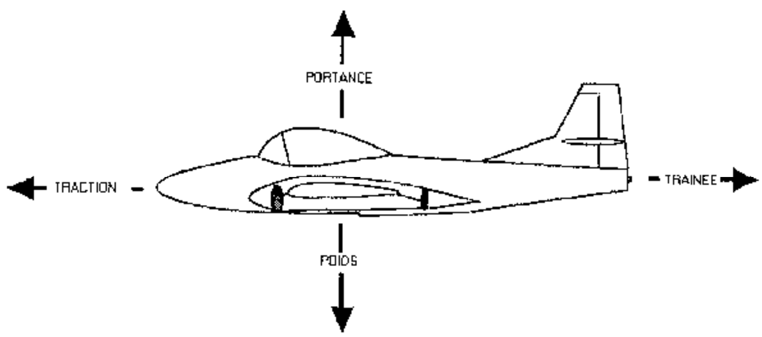
3. Atterrissage d'un avion

Un avion de chasse de masse 9 t en panne de freins atterrit à une vitesse de 241 $km.h^{-1}$. Une fois au sol, il est freiné en secours par un parachute de diamètre D = 3 m déployé instantanément par le pilote au moment où les roues de l'avion touchent le sol. On néglige la traînée de l'avion et les forces de frottement des roues sur le sol par rapport à la force de traînée (frottement fluide) du parachute. On considère que le réacteur ne délivre plus aucune poussée.

3.1. Établir l'équation différentielle à laquelle obéit la vitesse v de l'avion. En déduire l'expression de v en fonction de la date t. On prendra comme origine des temps la date à laquelle les roues de l'avion touchent le sol.

3.2. Dans le cas où les freins fonctionnent, la distance d'atterrissage de l'avion est de l'ordre de 1400 m. Déterminer la vitesse atteinte par l'avion après avoir été freiné uniquement par le parachute sur cette distance. A.N.

Données : Le coefficient C_x du parachute vaut 1 ,5.
La force de traînée T a pour expression : $T = C_x \rho S v^2 / 2$
V est la vitesse de l'avion ;
S est la surface projetée du parachute sur un plan perpendiculaire à la vitesse ;
C_x est un coefficient sans dimension, supposé constant.



B. MECANIQUE DES FLUIDES

On considère un référentiel galiléen R , d'origine O. Soit une particule fluide de volume dV, de masse dm, qui se trouve en un point M à une date t. Les grandeurs relatives à cette particule sont notées : $\boldsymbol{v}$ pour le vecteur vitesse, ρ pour la masse volumique, P pour la pression, z pour l'altitude.

1. Statique des fluides

1.1. *Pression d'un fluide*

1.1.a. Donner une définition macroscopique de la pression d'un fluide.

1.1.b. Quelles sont les unités de pression couramment utilisées ? Donner les correspondances entre elles.

1.2. Établir l'équation générale de la statique des fluides dans un référentiel galiléen (forme locale).

1.3. On considère un fluide incompressible au repos. Exprimer la différence de pression entre deux points A et B d'altitudes respectives z_A et z_B.

1.4. On considère que l'atmosphère terrestre est un gaz parfait compressible.
Dans la troposphère, entre 0 et 11 km d'altitude, on peut considérer que la température varie selon une loi affine du type $T = T_0 - B\,z$.
Montrer que dans ce cas la pression P peut s'exprimer en fonction de l'altitude z selon la loi :

$$P = P_0\,[(T_0 - B\,z)/T_0]^{\,a}$$

En déduire la formule traduisant les variations de la masse volumique en fonction de l'altitude. On posera $a = gM / RB$, g étant l'intensité du champ de pesanteur terrestre.
A.N. : $z = 11$ km ; à $z = 0$, $P_0 = 1$ atm et $T_0 = 288$ K ; $B = 6{,}5$ K.km^{-1}.

1.5. *Aérostat*
Au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, lors de la construction des premiers aérostats, deux voies s'ouvraient : celle des frères Montgolfier, qui remplirent le ballon d'air chaud, et celle du physicien Jacques Charles, qui utilisa du dihydrogène, gaz plus léger que l'air. Pour des raisons de sécurité, l'hydrogène fut remplacé plus tard par de l'hélium.
On considère un ballon sphérique, constitué d'une paroi souple d'un volume maximal $V_m = 200\ m^3$. Quand le gaz atteint le volume maximal, l'hélium s'échappe dans l'atmosphère par la partie inférieure du ballon. À son départ du sol, le ballon n'est pas complètement gonflé et son volume est V_0. La masse de son enveloppe, de la nacelle, des passagers et du lest emporté est $M_t = 100\ kg$. La densité de l'hélium est notée $d_{He} = 0{,}138$. Le ballon évolue à une altitude inférieure à 11 km.

1.5.a. Tant que le volume V du ballon n'est pas maximal, on considère que l'hélium est à chaque instant en équilibre thermique et mécanique avec l'atmosphère environnante. À quelle altitude z_1 le ballon atteint-il son volume maximal V_m ? Donner sa valeur numérique.

1.5.b. Établir l'expression de la force ascensionnelle F en fonction de l'altitude z. Commenter.

1.5.c. Quelle est l'altitude maximale z_m atteinte par le ballon ? Donner sa valeur numérique.

Tournez la page S.V.P.

1.5.d. On souhaite que le ballon atteigne une altitude de 1000 m supérieure à z_m. Calculer la masse m_l de lest qu'il faut lâcher ?

2. Cinématique des fluides

2.1. *Fluide parfait*

2.1.a. Donner la définition d'un fluide parfait.
2.1.b. Comment cette propriété se traduit-elle du point de vue énergétique ?

2.2. *Grandeurs extensives et intensives*

2.2.a. Définir une grandeur extensive, une grandeur intensive.
2.2.b. Pour chaque type de grandeur, donner deux exemples utilisés en mécanique des fluides.
2.2.c. Définir la densité volumique de quantité de mouvement d'un fluide. Cette grandeur est-elle intensive ou extensive ?

2.3. Donner la définition :

2.3.a. d'un écoulement fluide en régime permanent ou stationnaire ;
2.3.b. d'un écoulement irrotationnel.

2.4. *Lignes de courant*
Montrer que l'équation différentielle des lignes de courant pour un écoulement bidimensionnel peut s'écrire, dans le plan (O, $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$) :

$$\mathrm{d}x / v_x = \mathrm{d}y / v_y \qquad \text{en cordonnées cartésiennes}$$

et

$$\mathrm{d}r / v_r = r\,\mathrm{d}\theta / v_\theta \qquad \text{en coordonnées polaires.}$$

2.5. Donner l'équation locale de conservation de masse pour un fluide. Montrer que dans le cas d'un fluide en écoulement incompressible, elle peut s'écrire :

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$$

2.6. Établir l'équation intégrale de conservation de la masse dans le cas d'un fluide en écoulement permanent et unidirectionnel.

3. Dynamique des fluides

On rappelle l'équation d'Euler :

$$\partial \boldsymbol{v}/\partial t + (\boldsymbol{v}.\mathbf{grad})\boldsymbol{v} = -1/\rho\,\mathbf{grad}\,P + \boldsymbol{g}$$

et la relation de Bernoulli : $\quad P / \rho + g\ z + v^2 / 2 = \text{constante}$

3.1. Citer les conditions qui doivent être remplies pour que cette dernière relation puisse être applicable.

Dans la suite de problème, on se placera dans les conditions d'application de cette relation.

3.2. Faire une interprétation énergétique de la relation de Bernoulli.

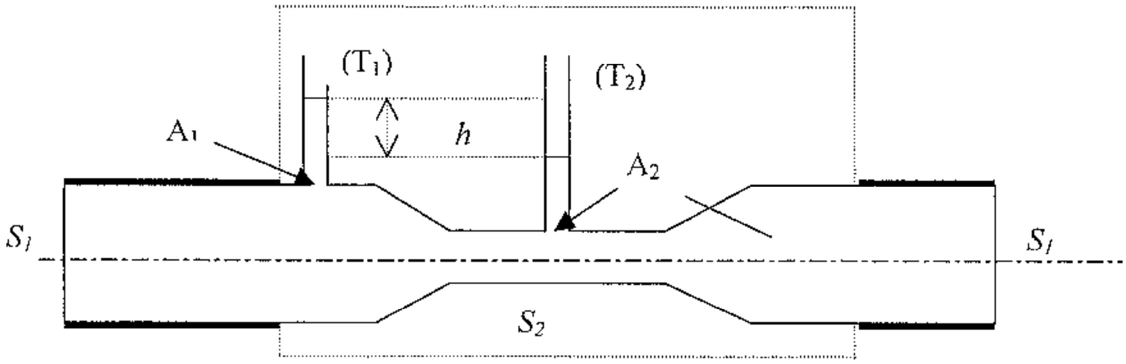
3.3. Par une analyse dimensionnelle, montrer que cette relation est homogène.

3.4. Qu'appelle-t-on « pression dynamique » ? « pression totale » ?

4. Effet Venturi

On insère dans une canalisation de section S_1 un tube dit « de Venturi » de section S_2. Le fluide s'écoulant en régime permanent dans la canalisation est de l'eau. On considère que les vitesses sont uniformes dans chaque section droite du tube.

L'axe de la canalisation est horizontal et deux tubes verticaux (T_1) et (T_2) jouent le rôle de capteurs de pression. On observe une dénivellation de hauteur h entre les surfaces libres de l'eau des tubes (T_1) et (T_2) ouverts à l'air.



Tube de Venturi

On note P_0 la pression atmosphérique, P_1 la pression et v_1 la vitesse de l'écoulement en amont du tube de Venturi. A_1 est un point à la base du tube (T_1) et A_2 est un point à la base du tube (T_2).

4.1. Les vitesses d'écoulement du fluide sont notées v_2 dans le tube de section S_2 et v_3 en aval du tube de Venturi. Exprimer ces vitesses en fonction de la constante de pesanteur g, de h, de S_1 et de S_2.

4.2. Exprimer le débit volumique D_v en fonction de g, h, S_1 et S_2.

4.3. Application numérique : $S_1 = 50$ cm² ; $S_2 = 30$ cm^2 ; $h = 1{,}25$ m.

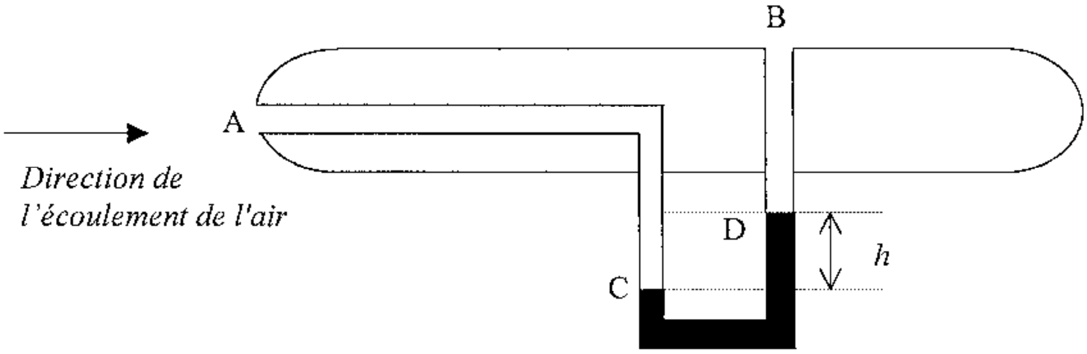
4.4. Quel est l'intérêt pratique d'un tel dispositif ?

4.5. Citer des applications concrètes de l'effet Venturi.

Tournez la page S.V.P.

5. Tube de Pitot

Les tubes de Pitot sont utilisés en aéronautique pour mesurer la vitesse d'un avion. Ils sont constitués d'un tube très fin placé parallèlement à la direction de l'écoulement de l'air. Les orifices A et B permettent des prises de pressions.



Tube de Pitot

On considère que l'air est un fluide parfait, incompressible et en écoulement stationnaire, et que le dispositif ne perturbe pas l'écoulement.

La masse volumique, la vitesse et la pression de l'air loin du tube sont notées respectivement ρ_0, $\boldsymbol{v_0}$ et P_0.

5.1. Représenter l'allure de la ligne de courant C_A qui aboutit en A et l'allure de C_B qui longe le tube en B.

5.2. Déterminer les vitesses v_A en A et v_B en B ainsi que les pressions P_A et P_B. Quel est le nom donné au point A ?

5.3. Dans le manomètre, on mesure une dénivellation h entre les deux niveaux de liquide de masse volumique ρ_l. En déduire la vitesse d'écoulement v_0 de l'air.
A.N. : $h = 24$ *cm.* ; $\rho_l = 1{,}0.10^3$ *kg.m*$^{-3}$.

6. Portance d'une aile d'avion

On admet que l'étude de l'influence d'une aile d'avion sur un écoulement uniforme peut se ramener à celle d'un cylindre en rotation sur un écoulement permanent (transformation de Joukovski).
On considère l'écoulement en régime permanent et irrotationnel d'un fluide parfait incompressible autour d'un cylindre de longueur infinie, de rayon a et d'axe Oz. Loin en amont du cylindre, l'écoulement est uniforme à la vitesse $\boldsymbol{v_0} = v_0\, \mathbf{e}_x$. On négligera dans ce paragraphe l'effet de la pesanteur.

6.1. *Écoulement bidimensionnel autour d'un cylindre fixe*
Dans ce paragraphe, on considère que le cylindre est fixe dans un référentiel R muni d'un repère (O, $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$). On admet que le champ de vitesse $\boldsymbol{v}$ en un point M de l'écoulement bidimensionnel a pour expression, en coordonnées polaires :

$$\boldsymbol{v}(\mathrm{M}) = (A - B/r^2)\cos\theta\, \mathbf{e}_r - (A + B/r^2)\sin\theta\, \mathbf{e}_\theta$$

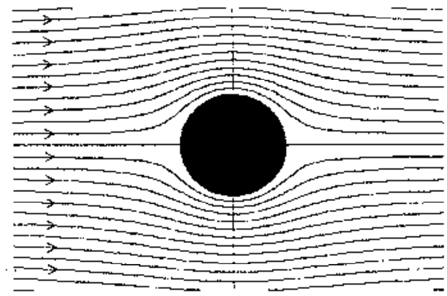
A et B sont des constantes.

6.1.a. A partir des conditions aux limites vérifiées par ce champ de vitesses pour $r \to a$ et pour $r \to \infty$, déduire les expressions des constantes A et B en fonction de v_0 et a.

6.1.b. Rechercher la position des points d'arrêt dans ce cas.

6.1.c. En utilisant les relations démontrées au 2.4., établir l'équation différentielle vérifiée par les lignes de courant.

6.1.d. Montrer que l'équation $(r - a^2/r)\sin\theta = C$, où C est une constante, est solution de cette équation différentielle. Dans ce cas, l'allure des lignes de courant autour du cylindre est la suivante :



Comparer les résultats donnés par l'équation et le schéma ci-dessus dans le cas où on se situe loin du cylindre et dans le cas où on est à la surface le cylindre. Commenter.

6.1.e. Déterminer sur le schéma ci-dessus les zones de grandes vitesses et les zones de basses vitesses. Confronter ces résultats avec ceux trouvés à la question 6.1.a.

6.1.f. Appliquer le théorème de Bernoulli entre un point à l'infini et un point à la surface du cylindre. En déduire la force de pression s'exerçant sur un élément de surface dS au point M ($r = a$, θ). En déduire la résultante des actions de pression exercées sur le solide. Ce résultat est appelé « Paradoxe de d'Alembert ». Expliquer en quoi consiste ce paradoxe. Le modèle utilisé permet-il d'expliquer la portance et la traînée des ailes d'avions ? Pourquoi ?

6.2. *Écoulement bidimensionnel autour d'un cylindre en rotation*

On considère maintenant que le cylindre est animé d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\,.\,\mathbf{e}_z$ dans le référentiel R. On admet qu'alors le champ de vitesse $\boldsymbol{v}$(M) de l'écoulement bidimensionnel et irrotationnel a pour expression, en coordonnées polaires :

$$\boldsymbol{v}(\mathrm{M}) = (A' - B'/r^2)\cos\theta\,\mathbf{e}_r + [\,K/r - (A' + B'/r^2)\sin\theta\,]\,\mathbf{e}_\theta$$

A', B' et K étant des constantes, $K > 0$ et $K = a^2\Omega$.

6.2.a. A partir des conditions aux limites vérifiées par ce champ de vitesses pour $r \to a$ et pour $r \to \infty$, déduire les expressions des constantes A' et B' en fonction de v_0 et a.

6.2.b. Déterminer, selon les valeurs du paramètre $\alpha = K / av_0$, le nombre et la position des points d'arrêt. En déduire dans chaque cas l'allure des lignes de courant autour du cylindre.

6.2.c. Appliquer le théorème de Bernoulli entre un point à l'infini et un point à la surface du cylindre. En déduire l'expression de la pression P en un point de la couche fluide en contact avec la surface du cylindre en fonction de ρ, v_0, α, θ et P_1, P_1 étant la pression du fluide au point M_1 de coordonnées polaires ($r = a$, $\theta = \pi/2$).

6.2.d. Déterminer la force F_M, dite force de Magnus, exercée par le fluide sur une portion de longueur h du cylindre en fonction de ρ, v_0, K et h.

On rappelle que $\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\,d\theta = 0$, $\int_0^{2\pi}\sin^3\theta\,d\theta = 0$.

Tournez la page S.V.P.

Mettre cette force sous la forme :

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{M}} = \beta \ \boldsymbol{v}_0 \wedge \boldsymbol{\Omega}$$

Exprimer la constante β en fonction des paramètres. Que représente-t-elle ?
Commenter l'orientation et le sens de la force $\boldsymbol{F}_{\mathrm{M}}$.
Quel sera le sens choisi pour le vecteur rotation $\boldsymbol{\Omega}$ afin que ce modèle explique la portance d'une aile d'avion ?

LA PARTIE C EST EXPOSEE PAGES SUIVANTES

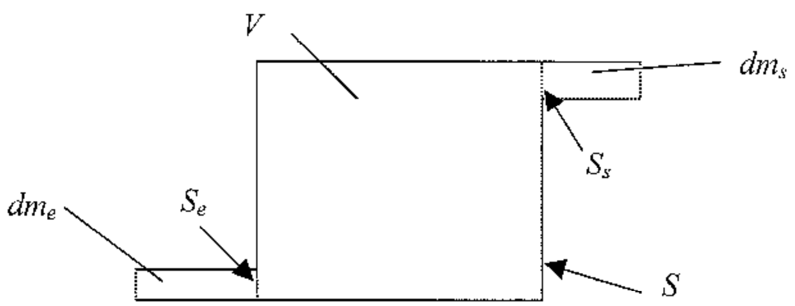
C. PROPULSION

Il est nécessaire, pour créer et entretenir le mouvement d'un véhicule aéronautique quelconque, de disposer de propulseurs dont le rôle est d'engendrer une force s'opposant à la traînée aérodynamique. Dans tous les cas, cette propulsion est associée au rejet vers l'arrière d'un certain débit massique de fluide.
On peut classer les systèmes propulsifs en deux catégories :

- les systèmes propulsifs à réaction indirecte : la modification de la vitesse de l'air autour de l'aéronef est obtenue au moyen d'une **hélice**. On distingue deux cas :
  - **le motopropulseur** : le moteur est un moteur à explosion ;
  - **le turbopropulseur** : le moteur est une turbine à gaz .
- les systèmes propulsifs à réaction directe : la modification de vitesse génératrice de poussée résulte de processus thermodynamiques internes. Là encore, on distingue deux cas :
  - **les fusées** les systèmes n'utilisent pas l'air atmosphérique ;
  - **les réacteurs** les systèmes utilisent l'air atmosphérique au travers d'une turbine à gaz .

1. Premier principe de la thermodynamique pour les systèmes ouverts

Soit un volume de contrôle V délimité par une surface de contrôle S. La masse de fluide contenue dans ce volume est notée $m(t)$ à la date t et $m(t+dt)$ à la date $t+dt$. Pendant l'intervalle de temps dt, une masse dm_e entre par une ouverture de section S_e et une quantité de matière de masse dm_s sort par une ouverture de section S_s. On considère le système fermé Σ composé, à la date t des contenus matériels de V et dm_e, et à la date $t+dt$, des contenus matériels de V et dm_s.



1.1. Établir un bilan de masse et un bilan énergétique pour le système Σ ainsi défini, entre les dates t et $t+dt$.

1.2. Établir la relation traduisant le premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert. On notera les variations élémentaires d'énergie entre les dates t et $t+dt$: dE_Σ pour le système Σ et dE_v pour le système V, h l'enthalpie massique, v_e la vitesse macroscopique du fluide entrant et v_s celle du fluide sortant, z_e et z_s les altitudes correspondantes.

1.3. Montrer que dans le cas d'un système ouvert Σ en régime stationnaire, cette relation peut se mettre sous la forme :

$$(h + v^2 / 2 + g\,z)_s - (h + v^2 / 2 + g\,z)_e = w' + q \qquad \text{relation (1)}$$

Identifier les termes w' et q.

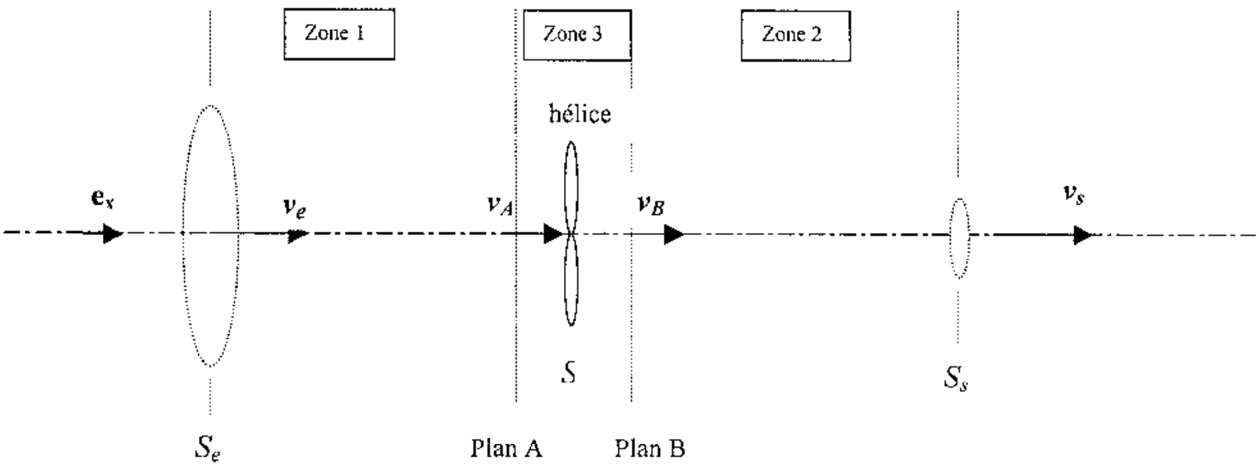
Tournez la page S.V.P.

2. Étude d'une hélice

Soit une hélice propulsive d'axe horizontal $x'x$ dirigé par un vecteur unitaire e_x . L'hélice brasse de l'air, considéré comme un fluide parfait incompressible de masse volumique ρ. L'écoulement est stationnaire dans un référentiel R galiléen. On considère le fluide compris à l'intérieur d'un tube de courant, s'appuyant sur le contour balayé par l'hélice, de section S, et sur deux surfaces de sections S_e et S_s. La vitesse de l'air par rapport à l'hélice sera notée :

- v_e loin en amont de l'hélice, au niveau de la section S_e
- v_s loin en aval de l'hélice, au niveau de la section S_s
- v_A juste avant l'hélice, au niveau de la section S
- v_B juste après l'hélice, au niveau de la section S

On supposera que les vitesses et les pressions sont uniformes dans toute section droite du tube, et que la zone extérieure au tube de courant n'est pas affectée par le mouvement de l'hélice. La pression de l'air P_e y est uniforme. La pression du fluide dans le tube de courant est notée P_A juste avant l'hélice et P_B juste après. Les forces de pesanteur sont négligées.



2.1. En appliquant la conservation du débit massique, établir les relations qui relient les vitesses v_A, v_B, v_e, v_s et les trois sections S, S_e et S_s.

2.2. Appliquer le théorème de Bernoulli, d'une part à la portion de fluide située en amont (zone 1) et d'autre part à la portion de fluide située en aval (zone 2). En déduire une relation liant P_A, P_B, v_e, v_s et ρ. Pourquoi n'est-il pas possible d'appliquer le théorème de Bernoulli dans la zone 3 ?

2.3. Appliquer la relation fondamentale de la dynamique au volume fluide Σ délimité par le tube de courant et les sections S_e et S_s. En déduire une première expression de la force f exercée par l'hélice sur le fluide. Quelle est la forme générale du tube de courant dans le cas d'une hélice motrice ?

2.4. Appliquer à nouveau la relation fondamentale de la dynamique à un volume mince entourant l'hélice (zone 3). En déduire une deuxième expression de la force f.

2.5. Démontrer que la vitesse v_A peut s'écrire : $v_A = (v_e + v_s) / 2$. Établir une relation entre la puissance P reçue par le fluide et les paramètres ρ, S, v_A et v_e.

2.6. L'hélice propulsive étudiée permet le mouvement d'un avion dans l'air au repos par rapport au sol. Sa vitesse v_e est constante.

2.6.a. Donner une première expression du rendement η de l'hélice en fonction de v_e et v_s. On note P_m la puissance fournie par le moteur et P_u la puissance de la force de propulsion. Commenter l'expression obtenue.

2.6.b. Donner une deuxième expression du rendement de l'hélice en fonction de f. Les valeurs de f et de v_e étant généralement imposées, comment peut-on améliorer le rendement de l'hélice ?

2.7. L'hélice propulsive permet le maintient en vol stationnaire d'un hélicoptère de masse M dans le champ de pesanteur uniforme $\boldsymbol{g}$. Assez loin au-dessus du rotor de l'hélicoptère, l'air est considéré comme étant au repos par rapport au sol. Déterminer la puissance P qui doit être reçue par le fluide au niveau du rotor pour maintenir le vol stationnaire. Quelle est la vitesse de l'air sous l'hélicoptère ?
A.N. : $M = 2{,}7$ tonnes,
Rayon d'une pale de l'hélicoptère $R = 5{,}2$ m.

3. Étude d'une tuyère

Afin d'assurer la propulsion d'un avion, il est possible de capter un certain débit d'air en amont de l'avion et de le rejeter vers l'arrière avec une certaine vitesse. Lorsque le réacteur est chargé de fournir l'énergie nécessaire à l'accroissement de l'énergie cinétique du fluide par l'intermédiaire d'une tuyère, on parle alors de turboréacteur.
Les tuyères sont également utilisées afin d'assurer la propulsion de fusées. Dans ce cas, elles sont placées à la sortie d'une chambre de chauffe ou d'un propulseur à poudre où des gaz sont portés à haute température et haute pression.

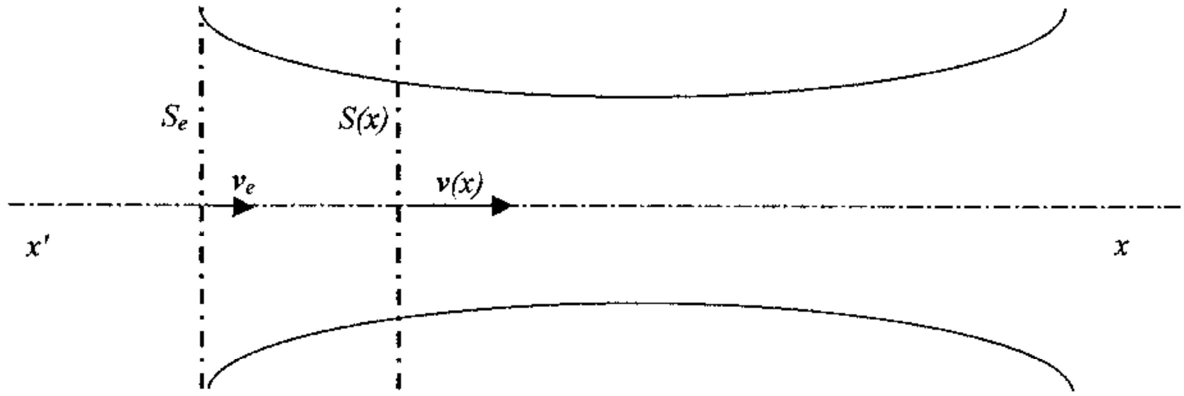
On étudie une détente d'air dans une tuyère de révolution autour d'un l'axe $x'x$ horizontal. L'écoulement est stationnaire, unidimensionnel, permanent, adiabatique et localement réversible. De plus, on admettra que la pression décroît le long de la tuyère.
L'air est considéré comme un gaz parfait de masse molaire $M = 29$ g.mol^{-1}. On note $\gamma = 7/5$ le rapport des capacités thermiques isobare et isochore. On néglige l'influence locale de la pesanteur.
A l'entrée de la tuyère, en $x = 0$, la vitesse du gaz est notée v_e, sa pression P_e, sa température T_e, sa masse volumique ρ_e. Au niveau de la section $S(x)$, la vitesse du gaz est notée $v(x)$, sa pression $P(x)$, sa température $T(x)$, sa masse volumique $\rho(x)$. On note c_p la capacité thermique massique à pression constante, $c = \sqrt{\gamma RT/M}$ la vitesse du son, et $\mathcal{M} = v/c$ le nombre de Mach.

3.1. A partir de la relation (1) établie à la question 1.3, montrer que le premier principe de la thermodynamique s'écrit dans ce cas :

$$h_e + v_e^2/2 = h + v^2/2 \qquad \text{relation (2)}$$

En déduire une expression de la vitesse $v(x)$ en fonction de v_e, T_e et $T(x)$.

Tournez la page S.V.P.



3.2. *Débit massique et vitesse d'écoulement.*
On prendra dans toute la suite $v_e = 0$.

3.2.a. Établir l'expression de $v(x)$ en fonction de P_e, T_e et $P(x)$.

3.2.b. Exprimez le débit massique D_m en fonction du rapport $\alpha = P / P_e$, à une abscisse x donnée, pour une section $S(x)$ fixée

On posera $K = \rho_e S\sqrt{2c_p T_e}$.

3.2.c. Etudier les variations de D_m pour $0 \leq \alpha \leq 1$. Pour quelle valeur α_c de α le débit massique D_m est-il maximal ? Expliquez l'origine physique de ce maximum. Calculer le débit massique D_{mc} pour la valeur α_c. Comparer la vitesse d'écoulement v_c, obtenue pour $\alpha = \alpha_c$, et la vitesse du son à l'abscisse x. Commenter le résultat obtenu.

3.2.d. Quel nom donne-t-on à la vitesse et à la pression dans ce cas ?

3.3. Montrer que les variations de $v(x)$ de $T(x)$ et de $\rho(x)$ suivant $x'x$ sont reliées par les deux relations :

$$dT / T = (\gamma - 1)\, d\rho / \rho$$
$$dT / T = -(\gamma - 1)\, \mathcal{M}^2\, dv/v$$

Commentez le signe de ces variations.

3.4. En utilisant la relation de conservation de la masse, montrer que dS / S peut s'exprimer en fonction de $\mathcal{M}$ et de dv / v selon :

$$dS / S = (\mathcal{M}^2 - 1)\, dv / v$$

3.5. Quelle forme la tuyère doit-elle avoir pour que :

- l'écoulement soit subsonique ?
- l'écoulement soit supersonique ?

Dans quelle situation la condition $\mathcal{M} = 1$ peut-elle être obtenue ? Quel est l'intérêt de cette géométrie ?

4. Fusée

On utilise la tuyère étudiée au paragraphe **3.** à la sortie d'un propulseur à poudre, dans le cas où celle-ci est convergente-divergente. Les hypothèses faites dans le paragraphe **3.** sont encore valables. A l'entrée de la tuyère de section S_e, la vitesse des gaz est quasiment nulle, la température et la pression, notées T_e et P_e, y sont uniformes. Les gaz sont éjectés de la tuyère à la vitesse v_s par la section S_s où la pression et la température sont notées $P_s = 1$ bar et T_s.

On prendra $r = R / M = 500$ J.K^{-1}.kg^{-1} ; $\gamma = 1{,}3$; $T_e = 2\,430$ K ; $P_e = 50$ bar.

4.1. Donner l'expression de la vitesse du fluide au niveau du col de section S_c.

4.2. A l'aide des relations établies au paragraphe **3.**, calculer les vitesses v_c et v_s, les températures T_c et T_s ainsi que la pression P_c.

A.N. Commenter les résultats obtenus.

4.3. On se place dans le cas où le débit massique est $D_m = 120$ kg.s^{-1}. Quelle est alors la force de poussée déployée par le propulseur à poudre ? Déterminer la surface S_s de sortie de la tuyère et calculer les diamètres d_s et d_c de la tuyère à la sortie et au col.

5. Moteur à explosion

En 1890, un avion a pu décoller pour la première fois grâce à la seule poussée de son moteur : Clément Ader avait équipé l'Éole d'un moteur à vapeur de 20 CV, actionnant une hélice quadripôle construite avec des cannes de bambou. Dans la recherche de la légèreté, le moteur à combustion interne et à pistons, le plus souvent à quatre temps, supplanta rapidement le moteur à vapeur.

Dans un moteur à explosion, le fluide supposé parfait décrit un cycle de Beau de Rochas en quatre temps :

(1) : L'air est admis dans le cylindre à travers une soupape d'admission dans un volume V_1 ;

(2) : **(2.a.)** Alors que les soupapes sont fermées, le mélange subit une compression isentropique jusqu'au volume V_2.

(2.b.) Il y a alors explosion du mélange {carburant, air} et échauffement isochore jusqu'à l'état (3) (P_3,V_3,T_3).

(3) : Les soupapes restent fermées et les produits de la combustion subissent une détente isentropique jusqu'à l'état (P_4,V_4,T_4).

(4) : La soupape d'échappement s'ouvre, le fluide subit un refroidissement isochore jusqu'à l'état initial. Le piston refoule alors les gaz brûlés.

5.1. Représenter le cycle dans le diagramme (P,V).

5.2. Exprimer le rendement théorique η_{th} de ce cycle en fonction du taux de compression $\alpha = V_1/ V_2$. Calculer la valeur du rendement théorique dans le cas où le taux de compression est de 6. Le gaz considéré est de l'air pour lequel $\gamma = 1{,}4$.

5.3. Quels sont les inconvénients majeurs du moteur à piston pour son utilisation dans un avion ?

5.4. Comment peut-on remédier à ces défauts ?

Tournez la page S.V.P.

6. Turbine à gaz

Une turbine à gaz fonctionne suivant le cycle théorique de Joule (ou cycle de Brayton), composé de deux adiabatiques et de deux isobares. Une unité de masse d'air, gaz supposé parfait, subit les transformations suivantes :

Étape 1 : L'air, dans l'état (1) (P_1,V_1,T_1) est aspiré dans le compresseur qui l'amène dans l'état (2) (P_2,V_2,T_2) par une compression isentropique. On néglige les vitesses d'écoulement. On notera w'_1 le travail massique fourni par le compresseur. L'air est initialement à la pression $P_1 = 1$ bar et à la température $T_1 = 280$ K. Le compresseur le porte à la pression $P_2 = 10$ bar.

Étape 2 : Dans la chambre de combustion, l'air subit un échauffement isobare jusqu'à l'état (3) (P_3,V_3,T_3). On note q_2 l'énergie thermique massique fournie à l'air dans cette étape. L'échauffement est limité par la température maximale que peut supporter la turbine : $T_3 = 1000$ K.

Étape 3 : L'air parvient alors dans la turbine où il subit une détente isentropique jusqu'à l'état (4) (P_4,V_4,T_4). On néglige les vitesses d'écoulement aussi bien à l'entrée qu'à la sortie de la turbine. On note w'_3 le travail massique reçu par l'air dans cette transformation. A la fin de cette détente, $P_4 = P_1$.

Étape 4 : L'air est rejeté dans l'atmosphère extérieure où il subit un refroidissement isobare jusqu'à l'état (1).

6.1. Représenter le cycle de Joule dans les diagrammes (P,V) et (T,S).

6.2. *Étape 1* : Établir les expressions de T_2 et w'_1, puis les calculer.

6.3. *Étape 2* : Établir l'expression de q_2 puis calculer sa valeur.

6.4. *Étape 3* : Établir les expressions de T_4 et w'_3, puis les calculer.

6.5. *Turbopropulseur*

On étudie le cas où le réacteur étudié entraîne une hélice propulsive ainsi que le compresseur (turbopropulseur).

6.5.a. Quel est le travail massique disponible pour faire tourner l'hélice ?

6.5.b. Exprimer l'efficacité de ce moteur en fonction du taux de compression $\alpha = V_1 / V_2$. Comparer l'efficacité de ce moteur avec celle du moteur à explosion étudié au paragraphe **5**, pour un même taux de compression $\alpha = 6$. Quel peut être l'intérêt du cycle de Joule par rapport à celui de Beau de Rochas ? Comparer le résultat obtenu avec le rendement du cycle de Carnot.

6.5.c. Le rapport des températures T_3 / T_1 a une valeur imposée. En revanche, le taux de compression peut être adapté. Pour quel taux de compression α_m obtient-on un travail maximal ? Exprimer ce travail maximal.

A.N. : $\gamma = 1,4$; $M = 29\ g.mol^{-1}$